Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$. L'application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$ est une forme n linéaire alternée non nulle et l'ensemble $\Lambda_n^*(E)$ des formes n linéaires alternées sur E est une droite vectorielle.

Démonstration :

Pour alléger ce qui suit nous noterons $\Delta = \det_{\mathcal{B}}$.

a) Montrons que $\Delta \neq 0$.

Pour cela calculons $\Delta(e_1,...,e_n)$. Comme $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1,...,e_n) = I_n = (\delta_{i,j})$ on a

$$\Delta(e_1,...,e_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\delta_{\sigma(i),i}.$$

Or $\prod_{i=1}^{n}\delta_{\sigma(i),i} = \begin{cases}1 \text{ si } \sigma = \text{Id}\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$ donc $\Delta(e_1,...,e_n) = \varepsilon(\text{Id})\times 1 = 1$. Par suite $\Delta \neq 0$.

b) Montrons que $\Delta : E^n \to \mathbb{K}$ est n linéaire

Soit $1 \le j \le n$, justifions la linéarité en la j ème variable.

Soit $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$. Soit $(x_1,...,\hat{x}_j,...,x_n) \in E^{n-1}$ et $x_j, y_j \in E$ vecteurs de matrices composantes dans $\mathcal{B}$: $\begin{pmatrix}a_{1,1}\\ \vdots \\ a_{n,1}\end{pmatrix},...,\overset{\wedge}{\begin{pmatrix}a_{1,j}\\ \vdots \\ a_{n,j}\end{pmatrix}},...,\begin{pmatrix}a_{1,n}\\ \vdots \\ a_{n,n}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}a_{1,j}\\ \vdots \\ a_{n,j}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_{1,j}\\ \vdots \\ b_{n,j}\end{pmatrix}$.

$$\Delta(x_1,...,\alpha x_j+\beta y_j,...,x_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}...(\alpha a_{\sigma(j),j}+\beta b_{\sigma(j),j})...a_{\sigma(n),n}$$

$$= \alpha\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}...a_{\sigma(j),j}...a_{\sigma(n),n} + \beta\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}...b_{\sigma(j),j}...a_{\sigma(n),n}$$

$$= \alpha\Delta(x_1,...,x_j,...,x_n) + \beta\Delta(x_1,...,y_j,...,x_n)$$

Ainsi Δ est une forme n linéaire.

c) Montrons que Δ est alternée

Soit $(x_1,...,x_n) \in E^n$ tel que $\exists 1 \le i < j \le n, x_i = x_j$. Notons $A = (a_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,...,x_n)$.

Considérons la transposition $\tau = (i,j)$ et l'application $\varphi : \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{S}_n - \mathfrak{A}_n$ définie par $\varphi(\sigma) = \sigma\circ\tau$.

L'application φ est bien définie et bijective.

$$\begin{aligned}\Delta(x_1,...,x_n) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}...a_{\sigma(n),n}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{A}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}...a_{\sigma(n),n} + \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n-\mathfrak{A}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}...a_{\sigma(n),n}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{A}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}...a_{\sigma(n),n} + \sum_{\sigma\in\mathfrak{A}_n}\varepsilon(\sigma\circ\tau)a_{(\sigma\circ\tau)(1),1}...a_{(\sigma\circ\tau)(n),n}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{A}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}...a_{\sigma(n),n} - \sum_{\sigma\in\mathfrak{A}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}...a_{\sigma(n),n} = 0\end{aligned}$$

car $\varepsilon(\sigma\circ\tau) = -\varepsilon(\sigma)$ et $a_{(\sigma\circ\tau)(1),1}...a_{(\sigma\circ\tau)(n),n} = a_{\sigma(1),1}...a_{\sigma(n),n}$ puisque $x_i = x_j$. Ainsi Δ est alternée.

d) Montrons que $\Lambda_n^*(E) = \{\lambda.\Delta / \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Soit $\varphi \in \Lambda_n^*(E)$ et $(x_1,...,x_n) \in E^n$. Notons $A = (a_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,...,x_n)$.

$$\varphi(x_1,...,x_n) = \varphi(\sum_{i_1=1}^{n}a_{i_1,1}e_{i_1},...,\sum_{i_n=1}^{n}a_{i_n,n}e_{i_n}) = \sum_{i_1=1}^{n}...\sum_{i_n=1}^{n}a_{i_1,1}...a_{i_n,n}\varphi(e_{i_1},...,e_{i_n}).$$

Or φ est alternée, donc $\varphi(e_{i_1},...,e_{i_n})$ est nul dès que les $i_1,...,i_n$ ne sont pas deux à deux distincts.

Après simplification des termes correspondants, il ne reste plus que les termes pour lesquels $\{i_1,...,i_n\} = \{1,...,n\}$ i.e. ceux qui correspondent aux applications $\sigma : j \mapsto i_j$ bijective. Ainsi

$$\varphi(x_1,...,x_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}a_{\sigma(1),1}...a_{\sigma(n),n}\varphi(e_{\sigma(1)},...,e_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}...a_{\sigma(n),n}\varphi(e_1,...,e_n).$$

Finalement $\varphi = \lambda.\Delta$ avec $\lambda = \varphi(e_1,...,e_n)$. Inversement, il est clair que $\forall\lambda\in\mathbb{K}, \lambda.\Delta \in \Lambda_n^*(E)$ et on peut donc conclure que $\Lambda_n^*(E)$ est une droite vectorielle dont Δ est vecteur directeur.